

Statystyka wielowymiarowa - ćwiczenia 4

Zadanie 9

Zmienna losowa p -wymiarowa X ma wartość oczekiwaną μ i macierz kowariancji Σ . Wektory własne (ortonormalne) tej macierzy tworzą kolumny macierzy U zaś ich wartości własne - macierz diagonalną $\Lambda = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p]$. Niech $Y = U^T X$ będzie wektorem X wyrażonym w ortonormalnej bazie wektorów własnych, zaś Z obrazem Y w przekształceniu Mahalanobisa. Oblicz kwadrat długości $\|Z\|^2$ wektora Z . Jaką powierzchnię tworzą izolinie $\|Z\|^2$ to znaczy punkty spełniające warunek $\|Z\|^2 = c$? (rozważ to na przykładzie $p=2$).

Zadanie 10

Niech M będzie obrazem wektora X z zad.9 przez przekształcenie Mahalanobisa .

a) Pokaż, że

$$\|M\|^2 = (X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu)$$

b) Punkty spełniające warunek $\|M\|^2 = c$ są elipsoidami o kierunkach U_i gdzie $U = [U_1, U_2, \dots, U_p]$.

c) Długość i -tej osi wynosi o kierunku U_i wynosi $2\sqrt{c\lambda_i}$

d) Co ciekawego możesz powiedzieć o rozkładzie wektora X , gdy

$$\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i} \geq 1 - \epsilon$$

dla małych $\epsilon > 0$ i $k = 1, 2$?

e) Kostka styczna do elipsoidy $\|M\|^2 = c$ o ścianach prostopadłych do osi prostokątnego układu współrzędnych, w których zapisano wektor X , ma ściany o równaniach:

$$x_i = \mu_i \pm \sqrt{c\Sigma_{ii}}$$

Zadanie 10* (za ekstra premię)

Pokaż, że gdy macierz kwadratowa A jest symetryczna i dodatnio określona to

$$\det(A) \leq \prod_{i=1}^p A_{ii}$$

Wynioskuj stąd, że objętość kostki prostopadłościenniej opisanej na elipsoidzie z zad 10b nie przekracza objętości kostki z zad 10e.

Wsk. skorzystaj z tożsamości:

$$\det(A) = A_{11} \det\left(A^* - \frac{bb^T}{A_{11}}\right)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & b^T \\ b & A^* \end{bmatrix}$$

Zadanie 11

Niech A i B będą p -wymiarowymi kwadratowymi macierzami symetrycznymi i $B > 0$ (ma dodatnie wartości własne). Pokaż, że

$$\max x^T A x$$

przy warunku $x^T B x = 1$ jest równe największej wartości własnej $B^{-1}A$.

Wskazówka. Skorzystaj z rozkładu spektralnego A i B .